Tronc commun Sciences BIOF

Correction Devoir en classe :

PRODUIT SCALAIRE Et TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN

Exercice1 : Soit ABC un triangle tel que : $AB=1$; $AC=\sqrt{2}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$

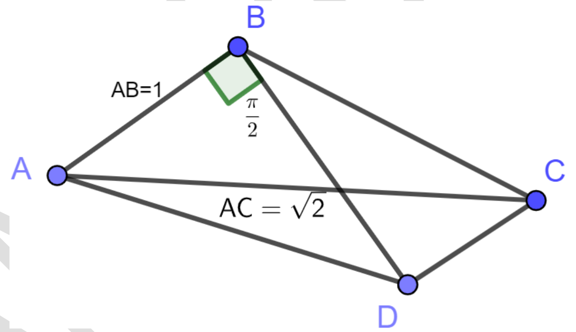
1) Calculer : $\cos BAC$ et la distance BC

2) On considère le point D tel que : $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

a) Montrer que : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$

b) Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ c) Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$ et déduire la nature du triangle ABD

Solution : 1) a) Calculons $\cos BAC$



On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$ donc : $AB\times AC\cos BAC=-\frac{1}{2}$

Donc : $2\times 4\times\cos BAC=-\frac{1}{2}$

Donc : $\boxed{\cos BAC=-\frac{1}{16}}$

2) a) Calculons BC :

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos BAC$

Donc : $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Donc : $BC^2=1^2+\sqrt{2}^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

Donc : $BC^2=4$

Par suite : $BC=\sqrt{4}=2$

2) a) Montrons que : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$

On a : $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+2\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{3} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)}$

b) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\left(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\overrightarrow{AB}^2\right)=\frac{1}{3}\left(-1+AB^2\right)=\frac{1}{3}\left(-1+2^2\right)=\frac{1}{3}(-1+4)=\frac{3}{3}=\boxed{1}$

b) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\left(-\overrightarrow{AB}\right)+1=-\overrightarrow{AB}^2+1=-AB^2+1=-1+1=0$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=\boxed{0}$ par suite : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BD}$ c'est-à-dire : $(AB)\perp(BD)$

Déduction : ABD est un triangle rectangle en B

Exercice2 : Soit $[AB]$ un segment tel que : $AB=6cm$ et soient O le milieu du segment $[AB]$ et M Un point quelconque dans le plan (P)

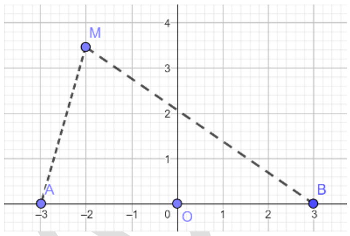
1) a) Calculer $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ en fonction de OM

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan (P) tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=7$

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan (P) tel que : $MA^2+MB^2=26$

Solution : 1) a) Calculons $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ en fonction de OM :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}\right)$ car O le milieu du segment $[AB]$ $(\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA})$



$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OA}^2=MO^2-OA^2=OM^2-3^2=OM^2-9$$

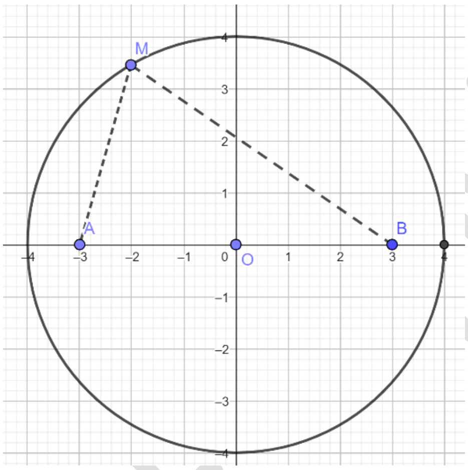
Donc : $\boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=OM^2-9}$

b) Déterminons et construisons l'ensemble des points M du plan (P) tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=7$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=7 \Leftrightarrow OM^2-9=7 \Leftrightarrow OM^2=16 \Leftrightarrow OM=\sqrt{16} \Leftrightarrow OM=4$$

Par conséquent : l'ensemble des points M du plan est le cercle de centre O et de rayon $R=4$

La figure :



2) Déterminons et construisons l'ensemble des points M du plan (P) tel que : $MA^2+MB^2=26$

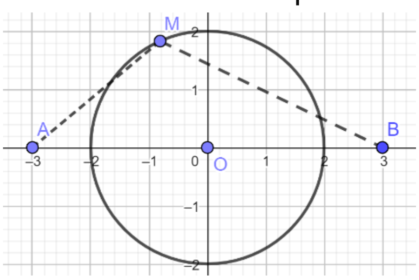
Comme O le milieu du segment $[AB]$ et M un point quelconque dans le plan (P)

D'après le Théorème de la médiane dans ABM nous obtenons : $MA^2+MB^2=2OM^2+\dfrac{AB^2}{2}$

Donc : $2OM^2+\dfrac{6^2}{2}=24 \Leftrightarrow 2OM^2+18=26 \Leftrightarrow 2OM^2=8 \Leftrightarrow OM^2=4 \Leftrightarrow OM=2$

Par conséquent : l'ensemble des points M du plan est le cercle de centre O et de rayon $R=2$

La figure :



Exercice 3 : $ABCD$ un parallélogramme et F un point tels que : $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

La droite passant par F et parallèle a (AD) coupe (AB) en H et coupe (DC) en I

La droite passant par F et parallèle a (AB) coupe (AD) en G et coupe (BC) en E

1) Faite une figure convenable
2) Soit l'homothétie h de centre F qui transforme le point A en C
Montrer que le rapport k de l'homothétie est $k=-2$
3) a) Déterminer l'image de la droite (AD) et celle de (GF) par l'homothétie h

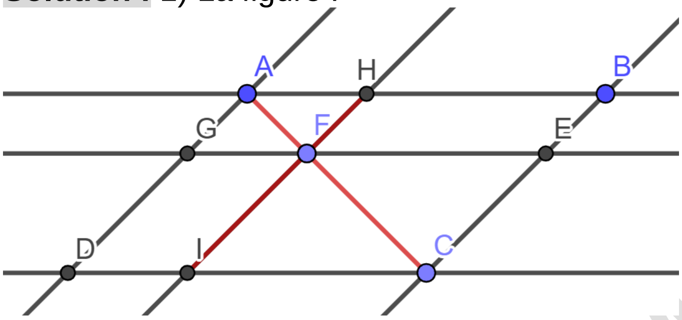
b) Déduire que : $h(G)=E$

c) Montrer que : $\frac{FI}{FH}=2$

d) Déduire que : $h(H)=I$

e) Montrer que : $\overrightarrow{IE}=-2\overrightarrow{HG}$ et que : $IE=2HG$

Solution : 1) La figure :



2)l'homothétie h de centre F qui transforme le point A en C C'est-à-dire : $h_{(F\,;\,k)}(A)=C$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{FC}=k\overrightarrow{FA}$: Montrons que : $k=-2$

On sait que/ $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $3\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}$

Donc : $3\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}\right)$ c'est-à-dire : $3\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{FC}=\vec{0}$

Donc $2\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FC}$
C'est-à-dire : $\overrightarrow{FC}=-2\overrightarrow{FA}$ et comme : $\overrightarrow{FC}=k\overrightarrow{FA}$
Par suite : $k=-2$
3)a) Déterminons l'image de la droite (AD) par l'homothétie h :

On a : $h(A)=C$ et on sait que L'image de la droite (AD) par une homothétie est une droite qui lui est parallèle et donc passe par l'image de A C'est-à-dire : C donc $h\left(\left((AD)\right)\right)=(BC)$

b) Déterminons l'image de la droite (GF) par l'homothétie h :

Puisque : le centre de l'homothétie h est F et $F\in(GF)$

Alors : $h\left((GF)\right)=(GF)$

b) Déduisons que : $h(G)=E$

Comme G est le point d'intersection de (AD) et (GF) c'est-à-dire : $(AD)\cap(GF)=\{G\}$

Alors : $h(G)$ est le point d'intersection de $h\left((AD)\right)=(BC)$ et $h\left((GF)\right)=(GF)$ c'est-à-dire :

$h\left((AD)\right)\cap h\left((GF)\right)=\{h(G)\}$ et comme : $h\left((AD)\right)\cap h\left((GF)\right)=\{E\}$

Alors : $h(G)=E$

c) Montrons que : $\frac{FI}{FH}=2$

Nous pouvons appliquer le théorème de Thalès dans le triangle : FIC car $(AH)\parallel(IC)$

Donc : $\frac{FI}{FH}=\frac{FC}{FA}=\frac{2FA}{FA}=2$ c'est-à-dire : $\frac{FI}{FH}=2$

d)On a : $\frac{FI}{FH}=2$ donc : $FI=2FH$ et comme les vecteurs $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont colinéaires et de sens contraires

Alors : $\overrightarrow{FI}=-2\overrightarrow{FH}$ c'est-à-dire : $h(H)=I$

e) Montrons que : $\overrightarrow{IE}=-2\overrightarrow{HG}$

On a : $\begin{cases} h(G)=E \\ h(H)=I \end{cases}$ et par suite : D'après la propriété caractéristique on obtient : $\overrightarrow{IE}=-2\overrightarrow{HG}$

Par passage à la norme on obtient : $\left\|\overrightarrow{IE}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{HG}\right\|$

Donc : $IE=|-2|\left\|\overrightarrow{HG}\right\|$

Donc : $IE=2HG$